



TITLE:

線形作用素のスペクトル不変量と 非線形方程式の保存則 (ソリトンと Holonomic Quantum Fieldsの研究)

AUTHOR(S):

桑原, 類史

CITATION:

桑原, 類史. 線形作用素のスペクトル不変量と非線形方程式の保存則
(ソリトンとHolonomic Quantum Fieldsの研究). 数理解析研究所講究録
1979, 349: 32-44

ISSUE DATE:

1979-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104368>

RIGHT:

線形作用素のスペクトル不変量と

非線形方程式の保存則

京大 工 桑原 類史

§ 0. 序

ある種の非線形発展方程式は逆散乱法によって解くことができる。すなわち、非線形発展方程式

$$(1) \quad u_t = K(u) \quad (u_{xt} = K(u))$$

に対して、固有値方程式

$$(2) \quad A(u)\psi = \lambda\psi$$

および、時間発展方程式

$$(3) \quad \psi_t = B\psi$$

の組を考える。ここで、 $A(u)$ および B は線形作用素である。

このとき、本質的なことは、 u が方程式 (1) に従って変化するとき、固有値方程式 (2) の固有値 λ が時間 t に依らず一定であることである。

このことを線形作用素 $A \equiv A(u)$ を中心に考えてみる。 A の固有値全体を $Sp(A)$ とする。すると、非線形方程式 (1) は

$Sp(A)$ を不変にする A の変形, すなわち A の 等スペクトル変形 (isospectral deformation) の方程式であるといふことができる. 例えば, Hill 作用素

$$A(u) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u$$

に対する等スペクトル変形の方程式として, K-dV 方程式 および, 高次 K-dV 方程式 がある (Lax [1]).

今, I_A が $Sp(A)$ にのみ依存する量であるとき, I_A を A の スペクトル不変量 (spectral invariant) と呼ぶ. u が方程式 (1) に従って変化するとき $Sp(A)$ は不変であるから, I_A は非線形発展方程式 (1) の保存量であることがわかる. すなわち, C_K を (1) の保存量の全体, \mathcal{I}_A を A のスペクトル不変量の全体とすれば $\mathcal{I}_A \subset C_K$ が成り立つ. 特に, \mathcal{I}_A は時間発展式 (3) には無関係な保存量である.

ここでは, \mathcal{I}_A を考察するのに, Seeley [2] による方法を用いよう. その手順は以下の通りである;

(i) A に対して, 複素巾 A^s を定義する.

(ii) A^s の核函数 $K_s(x, y)$ を考える.

(iii) $Sp(A) = \{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ とするとき,

$$\zeta(s) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^s = \text{Trace} \int K_s(x, x) dx$$

が成り立つ. ($\text{Re}(s) \ll 0$)

(iv) $K_s(x, x)$ は 複素平面上で 1 位の極 (可算個) のみをもつ
 s の函数として,

有理型函数に解析拡大できる。

(v) 極における留数 $R_j(x)$ ($j=1, 2, \dots$) は A のシンボルから計算することができる。そして、 $\text{Trace} \int R_j(x) dx$ は A のスペクトル不変量である。

§1. 楕円型作用素の複素性

M を n 次元, コンパクト, C^∞ 多様体 ($\partial M = \emptyset$), E を M 上の C^∞ ベクトル束とする。

A を E 上の $m(>0)$ 階楕円型微分作用素で, 最小増大の方向 θ を持つとする。すなわち, A のシンボル $\sigma(A)$ が

$$\sigma(A)(x, \xi) = \sum_{j=0}^m a_{m-j}(x, \xi), \quad (a_{m-j}(x, \xi) \text{ は } \xi \text{ について } (m-j) \text{ 次同次})$$

であるとき,

⊙ $\forall \xi \neq 0$ に対し, $\det a_m(x, \xi) \neq 0$.

⊙ $a_m(x, \xi)$ の固有値は $\{\lambda; |\theta - \arg \lambda| > \delta, \delta > 0\}$ 内にある。

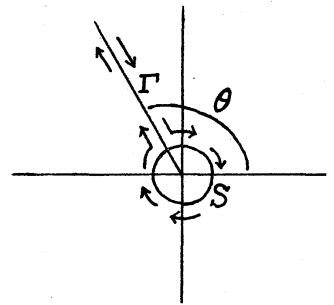
さらに, $\lambda = re^{i\theta} (r \geq 0)$ に対し, $(A - \lambda I)^{-1}$ が存在して,

⊙ $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-1}, (C: \text{定数})$

が成り立つとする。

Γ を右図の様な ∞ から ∞ への曲線とする。ただし, $\text{Sp}(A)$ が小円 S の外部にある様にとる。このとき,

$\text{Re}(S) < 0$ なる複素数 S に対し,



$$A_s = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^s (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

が定義される。そして, $\forall s \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{cases} A^s = A_s, & \operatorname{Re}(s) < 0 \\ A^s = A^k \cdot A_{s-k}, & k: \text{整数}, k-1 \leq \operatorname{Re}(s) < k \end{cases}$$

として定義すると, 次が成り立つ ([2]);

命題 1. A^s は $\operatorname{Re}(ms)$ 次の楕円型擬微分作用素で, $A^0 = I$,

$A^1 = A$, $A^{s+t} = A^s \cdot A^t$ を満足する。

さらに, A^s のシンボル $\sigma(A^s)$ は擬微分作用素の理論 (e.g. [3])

を使って求められる; $(A - \lambda I)$ のパラメトリクス B_λ のシンボル

$$\sigma(B_\lambda)(x, \xi, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$$

(ここで, $b_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$ は $(\xi, \lambda^{\frac{1}{m}})$ について $(-m-j)$ 次同次.)

に対して, $\sigma(B_\lambda(A - \lambda I)) = I$ であるから, 漸近展開公式より

$$\begin{cases} b_{-m}(a_m - \lambda) = I, \\ b_{-m-j}(a_m - \lambda) + \sum_{\substack{\ell < j \\ \ell + k + |\alpha| = j}} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha b_{-m-\ell}) (D_x^\alpha a_{m-k}) = 0. \end{cases}$$

これより,

$$(4) \quad \begin{cases} b_{-m} = (a_m - \lambda)^{-1}, \\ b_{-m-j} = -b_{-m} \left\{ \sum \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha b_{-m-\ell}) \cdot (D_x^\alpha a_{m-k}) \right\}. \end{cases}$$

そして, $\sigma(A^s)$ は $\{b_{-m-j}\}$ を用いて,

$$\sigma(A^s)(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^s b_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda$$

であることが示される。

§ 2. A^S の核函数および固有値との関係

$K_S(x, y)$ を A^S の核函数とする;

$$\text{i.e.} \quad (A^S f)(x) = \int_M K_S(x, y) f(y) dy.$$

$K_S(x, y)$ について次が成り立つ ([2]);

命題 2.

(i) 非負整数 k に対して, $S \mapsto K_S$ は

$\{S \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(mS) < -n - k\} \longrightarrow \mathcal{K}_{M \times M}^k \equiv \left\{ \begin{array}{l} M \times M \text{ 上の } \mathbb{C}^k\text{-函数} \\ \text{を成分とする行列} \end{array} \right\}$
 なる正則写像である。

(ii) C を $M \times M$ のコンパクト部分集合で, $\forall (x, x) \in C$ とする。

$S \mapsto K_S|_C$ (K_S の C への制限) は $\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}_C^\infty$ なる正則写像である。

(iii) $\forall x \in M$ に対して, $S \mapsto K_S(x, x)$ は $\{S \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(mS) < -n\}$ 上の正則函数から \mathbb{C} 上の有理型函数に解析拡大できる。そのとき, 極は $\underline{S = (k-n)/m}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) で, その位数は 1, 留数は

$$(5) \quad \frac{1}{(2\pi)^{n+1} i m} \int_{|\xi|=1} \int_{\Gamma} \lambda^{(k-n)/m} \cdot b_{-m-k}(x, \xi, \lambda) d\lambda d\xi$$

で与えられる。ただし, $S = 0, 1, 2, \dots$ で 留数は 0 となる。

次に、核函数 $K_s(x, y)$ と $Sp(A)$ の関係を見よう。

今、 A が可逆、すなわち、 $0 \notin Sp(A)$ とする。ベクトル束 E 上に定めらな Hermitian 内積が入っているとし、 A^* をこの内積に関する A の共役作用素とする。

【a】 A が正規 i.e. $AA^* = A^*A$ であるとき、 $Sp(A) = \{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ に対する固有函数系 $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ で、完備な正規直交系がとれる。そして、良く知られている様に、

$$(6) \quad K_s(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^s \phi_i(x) \otimes \overline{\phi_i(y)}$$

が成り立つ。これから、直ちに、次の関係式が得られる；

$$(7) \quad \zeta(s) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^s = \text{Trace} \int_M K_s(x, x) dx$$

【b】 A が正規でない場合、一般に $K_s(x, y)$ が (6) 式の様に簡単な形では表わせない。そして、「 $\text{Trace} \int_M K_s(x, x) dx$ が $Sp(A)$ のみに依存して決まる量である。」かどうか、わからない(と思う)。

【b'】 A が常微分作用素の場合、 A^* に対する固有値、固有函数を $\{\bar{\lambda}_i, \phi_i^*\}_{i=0}^{\infty}$ とする。($(\phi_i, \phi_i^*) = 1$ とする様に取る。)

もし、 $A - \lambda I$ の Green 函数 $G(x, \xi, \lambda)$ が λ の函数として 1 位の極のみを持てば、固有函数展開

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (f, \phi_i^*) \phi_i(x)$$

が成立する (e.g. [4])。従って、【a】の場合と同様に、

$$(6') \quad K_s(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^s \phi_i(x) \otimes \overline{\phi_i^*(y)}$$

が成り立つ。故に，この場合にも，関係式(7)が成立する。

注意1． A が自己共役のとき，Green函数 $G(x, \xi, \lambda)$ の極はすべて $1_{\text{佐}}$ である。

注意2． A が自己共役のとき， $a_m(x, \xi)$ が非負定値ならば，

$$\exp(-tA) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

を考えると，その核函数 $H(t, x, y)$ は $t > 0$ で C^∞ 函数となり， $H(t, x, x)$ は $t \rightarrow +0$ において，漸近展開 (Minakshisundaram-展開)

$$(8) \quad H(t, x, x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} B_{m-j}(x) t^{(j-n)/m}$$

が成り立つ。又， $Sp(A)$ とは

$$\eta(t) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} = \text{Trace} \int_M H(t, x, x) dx$$

なる関係がある。この様に，漸近展開(8)の係数 $B_{m-j}(x)$ に対して， $\text{Trace} \int_M B_{m-j}(x) dx$ ($j=0, 1, 2, \dots$) はスペクトル不変量である。ところで， $K_s(x, y)$ と $H(t, x, y)$ は

$$\Gamma(s) \cdot K_{-s}(x, y) = \int_0^\infty t^{s-1} \cdot H(t, x, y) dt, \quad (\Gamma(s) \text{ はガンマ函数})$$

という関係があることがわかり，従って， $B_{m-j}(x)$ も， A^s に対する議論と同様に， A のシンボルから計算できる。

§3. 非線形発展方程式の保存則

3-1. K-dV 方程式

K-dV 方程式

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

および、高次 K-dV 方程式は Hill 作用素

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

の等スペクトル変形の方程式である。A に対して $A^* = A$ で、

§1 の条件 ④ が成り立つことは容易にわかる。(ほとんどすべて (generic) の $u(x)$ に対して $0 \notin \text{Sp}(A)$ である。)

$$(9) \quad \sigma(A)(x, \xi) = \xi^2 + u(x)$$

であるから、(4) 式より、 b_{-2}, b_{-3}, \dots を求めることができる；

$$\begin{aligned} b_{-2} &= (\xi^2 - \lambda)^{-1}, & b_{-3} &= 0, & b_{-4} &= -(\xi^2 - \lambda)^{-2}u \\ b_{-5} &= -2i(\xi^2 - \lambda)^{-3}\xi u_x \\ b_{-6} &= 4(\xi^2 - \lambda)^{-4}\xi^2 u_{xx} - (\xi^2 - \lambda)^{-3}(u_{xx} - u^2) \\ b_{-7} &= 8i(\xi^2 - \lambda)^{-5}\xi^3 u_{xxx} + i(\xi^2 - \lambda)^{-4}\xi(6uu_x - 4u_{xxx}) \\ b_{-8} &= -16(\xi^2 - \lambda)^{-6}\xi^4 u_{xxxx} + 4(\xi^2 - \lambda)^{-5}\xi^2(3u_{xxx} - 4uu_{xx} - 3u_x^2) \\ &\quad - (\xi^2 - \lambda)^{-4}(u_{xxxx} - 3uu_{xx} + u^3 - 2u_x^2) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

これより、(5) 式によつて、 $S = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ における留数を計算して、保存量 $\underbrace{I_1 = \int u dx}, \underbrace{I_2 = \int u^2 dx}, \underbrace{I_3 = \int (u^3 + \frac{1}{2}u_x^2) dx}, \dots$ が得られる。

注意. ここで²の議論は $M = S^1$ としている。すなわち、周期的境界条件の下での非線形発展方程式を考察している。

3-2. AKNS 方程式

自明な 2 次元ベクトル束上の線形作用素

$$A = \begin{bmatrix} i \frac{\partial}{\partial x} & -iq(x,t) \\ ir(x,t) & -i \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

に対する等スペクトル変形の方程式として、K-dV 方程式、変形 K-dV 方程式、sine-Gordon 方程式、および非線形 Schrödinger 方程式が得られる (Ablowitz, et al [5]). これらをまとめて、AKNS 方程式と呼ぼう。すなわち、

$$\begin{cases} r=1, q=u \text{ とおくと, } u_t = 6uu_x - u_{xxx} \text{ (K-dV)} \\ r=q=v \quad \quad \quad, v_t = 6v^2v_x - v_{xxx} \text{ (変形 K-dV)} \\ r=-q = \frac{1}{2}\phi_x \quad \quad, \phi_{xt} = \sin \phi \text{ (sine-Gordon)} \\ r=-\sqrt{\frac{Q}{2}}\bar{u}, q=\sqrt{\frac{Q}{2}}u \text{ (} Q>2 \text{)}, iu_t = -u_{xx} - Q|u|^2u \text{ (非線形 Schrödinger).} \end{cases}$$

§1, §2 の議論を適用する為に、

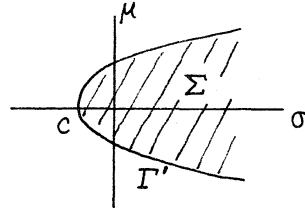
$$A^2 = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qr & q_x \\ r_x & qr \end{bmatrix} \equiv -I \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U$$

を考えよう。すると、 $S_p(A^2) = \{\lambda^2 \in \mathbb{C}; \lambda \notin S_p(A)\}$ であるから、スペクトル不変量に関して、 $\mathcal{I}_{A^2} \subset \mathcal{I}_A$ が成り立つ。

A^2 は 2 階 (楕円型) 作用素で、§1 の条件 ④ が成り立つ。特

に, $S_p(A^2)$ は λ 平面のある適当な放物線 $\Gamma': a(\sigma - c) + \mu^2 = 0$ ($a < 0, \lambda = \sigma + i\mu$) の内部 Σ にある (e.g. [6]).

また, A^2 は自己共役でないが, ほとんどすべて (generic) の U に対して, $0 \notin S_p(A)$ で,



かつ, Green 関数は 1 位の極のみをもつこともわかる. さて,

$$(10) \quad \sigma(A^2)(x, \xi) = \xi^2 I + U$$

であるから, (4) によって, b_{-2}, b_{-3}, \dots を求めると, Hill 作用素に対して求めた $\{b_i\}$ について, $u \rightarrow U$ なる置き換えを行ったものに等しいことが容易にわかる. ((9) と (10) を比べてみればよい.) この様に, 留数を計算し, スペクトル不変量を求める過程は Hill 作用素と全く等しくなる. 故に,

定理. $I_k = \int P_k(u, u_x, u_{xx}, \dots) dx$ ($k=1, 2, \dots$) が K-dV 方程式の保存量であれば, $\tilde{I}_k = \text{Trace} \int P_k(U, U_x, U_{xx}, \dots) dx$ は AKNS 方程式の保存量である.

U はそれぞれ,

(K-dV)	(変形 K-dV)	(sine-Gordon)	(非線形 Schrödinger)
$\begin{pmatrix} u & u_x \\ 0 & u \end{pmatrix},$	$\begin{pmatrix} v^2 & v_x \\ v_x & v^2 \end{pmatrix},$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\phi_x^2 & -\frac{1}{2}\phi_{xx} \\ \frac{1}{2}\phi_{xx} & -\frac{1}{4}\phi_x^2 \end{pmatrix},$	$\begin{pmatrix} -\frac{Q}{2} u ^2 & \sqrt{\frac{Q}{2}}u_x \\ -\sqrt{\frac{Q}{2}}\bar{u}_x & -\frac{Q}{2} u ^2 \end{pmatrix}.$

注意 1. U, U_x, U_{xx}, \dots は互いに可換ではないが, トレースは積の順序に依らない.

注意 2. 定理で述べた保存量 \tilde{I}_k 以外にも, 保存量は存在

する (特に, 非線形 Schrödinger 方程式に対して). それは, A のかわりに A^2 を考えたことによる.

3-3. 他の例

薩摩と Kaup [7] によれば, (Lax 型でない) 5 次 K-dV 方程式

$$(11) \quad u_t + 180u^2u_x + 30(uu_{xxx} + u_xu_{xx}) + u_{xxxxx} = 0$$

は, 逆散乱形式,

$$\begin{cases} \psi_{xxx} + 6u\psi_x = \lambda\psi \\ \psi_t = 9\psi_{xxxxx} + 90u\psi_{xxx} + 90u_x\psi_{xx} + 60(3u^2 + u_{xx})\psi_x \end{cases}$$

に書くことができる.

線形作用素

$$A = \frac{d^3}{dx^3} + 6u \frac{d}{dx}$$

を考察しよう. 偶数階作用素

$$-A^2 = -\frac{d^6}{dx^6} - 12u \frac{d^4}{dx^4} - 18u_x \frac{d^3}{dx^3} - (18u_{xx} + 36u^2) \frac{d^2}{dx^2} - (6u_{xxx} + 36u_xu) \frac{d}{dx}$$

を考える. さらに, 適当な定数 C をとり, $0 \notin \text{Sp}(-A^2 + C)$ とする様にする. 作用素 $-A^2 + C$ に対して, §§1, 2 の計算を行ってみよう. すると (かなり複雑な計算になる),

$$b_{-6} = (\xi^6 - \lambda)^{-1}, \quad b_{-7} = 0,$$

$$b_{-8} = 12u\xi^4(\xi^6 - \lambda)^{-2},$$

$$b_{-9} = -18iu_x\xi^3(\xi^6 - \lambda)^{-2} + 72iu_x\xi^9(\xi^6 - \lambda)^{-3}$$

$$b_{-10} = -18(u_{xx} + 2u^2)\xi^2(\xi^6 - \lambda)^{-2} + 144(2u_{xx} + u^2)\xi^8(\xi^6 - \lambda)^{-3}$$

$$-432 u_{xx} \xi^{14} (\xi^6 - \lambda)^{-4},$$

$$b_{-11} = \{(u^2)_x, u_{xxx}, \xi^i, (\xi^6 - \lambda)^{-i} \text{ の多項式} \},$$

$$b_{-12} = \{u^3, u_x^2, (u^2)_{xx}, u_{xxxx}, \xi^i, (\xi^6 - \lambda)^{-i} \text{ の多項式} \},$$

$$\vdots$$

そして、(5)式の値を計算し、自明でない保存量として、

$$b_{-8} \text{ から } \int u dx$$

$$b_{-12} \text{ から } \int (u^3 - \frac{1}{2} u_x^2) dx$$

が得られる。これらは、[7]で求められている保存量に一致する。

この手続きを続けて、方程式(11)の保存量が次々に得られることが期待される。^{ただし}(これ以降の保存量が[7]で得られているものに一致するかどうか確かめていない。)

注意。ここでは、 $-A^2 + C$ のスペクトルについて検討せず、形式的に(4),(5)式の値を計算した。この場合も、(11)の保存量からうまく求まる様である。講演の時、3階の作用素 A について計算し、求められた保存量が[7]のものと一致しない由を述べたが、後に、それが計算間違いであったことがわかった。おわびし、訂正する。実際、3階の作用素について(5)式の値は常に0になってしまう。

REFERENCES

- [1] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* 21(1968), 467-490.
- [2] R. T. Seeley, Complex powers of an elliptic operator, *Proc. Symposium in Pure Math. Vol.10*, Amer. Math. Soc. (1967), 288-307.
- [3] L. Nirenberg, Pseudo-differential operators, *Proc. Symposium in Pure Math. Vol.16*, Amer. Math. Soc. (1970), 149-167.
- [4] M. A. Neumark, *Linear Differential Operators*, I. Frederic Ungar Publ. Co., New York, 1968.
- [5] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segar, Non-linear-evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Letters* 31(1973), 125-127.
- [6] 溝畑 茂, 偏微分方程式論, 岩波, 1965.
- [7] J. Satsuma and D. J. Kaup, A Bäcklund transformation for a higher order Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Japan* 43(1977), 692-697.